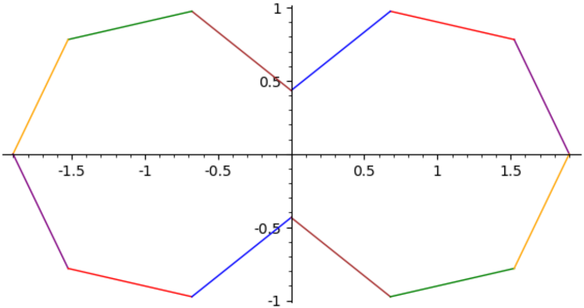
# Grupos de Hecke y puntos de connexión en superficies de traslación


Julien Boulanger

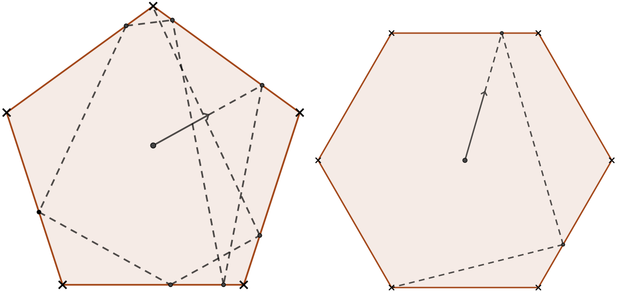
Centro de Modelamiento Matematico, U. de Chile


Febrero, 28, 2025



# Introducción: billar sobre polígonos regulares

Consideramos una trayectoria de billar ideal en un polígono regular que comienza en el centro del polígono.

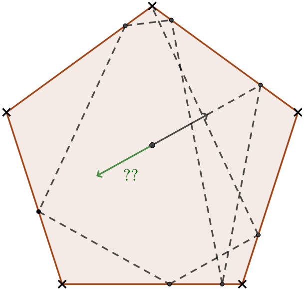


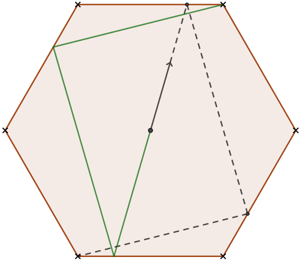
## Pregunta

Si la trayectoria alcanza un vértice, ¿la trayectoria obtenida a partir de la dirección inversa también alcanza un vértice?

# Introducción: billar sobre polígonos regulares

Consideramos una trayectoria de billar ideal en un polígono regular que comienza en el centro del polígono.



## Pregunta

Si la trayectoria alcanza un vértice, ¿la trayectoria obtenida a partir de la dirección inversa también alcanza un vértice?

## Pregunta

Si la trayectoria alcanza un vértice, ¿la trayectoria obtenida a partir de la dirección inversa también alcanza un vértice?

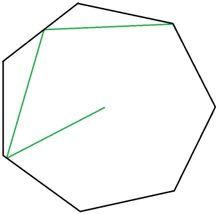
- En el caso de un triángulo equilátero, SI
- En el caso de un pentágono regular, SI, como resultado del trabajo de A. Leutbecher, 1967, combinado con el de W. Veech, 1989.

## Pregunta

Si la trayectoria alcanza un vértice, ¿la trayectoria obtenida a partir de la dirección inversa también alcanza un vértice?

- En el caso de un triángulo equilátero, SI
- En el caso de un pentágono regular, SI, como resultado del trabajo de A. Leutbecher, 1967, combinado con el de W. Veech, 1989.

- En una mesa de billar heptagonal y nonagonal ($n = 7, 9$), ya NO es verdad (B.-2022)
- Con $n \geq 11$ lados ($n$ impar), tampoco es verdad. (B.-2025)



## Pregunta

Si la trayectoria alcanza un vértice, ¿la trayectoria obtenida a partir de la dirección inversa también alcanza un vértice?

- En el caso de un triángulo equilátero, SI
- En el caso de un pentágono regular, SI, como resultado del trabajo de A. Leutbecher, 1967, combinado con el de W. Veech, 1989.

- En una mesa de billar heptagonal y nonagonal ($n = 7, 9$), ya NO es verdad (B.-2022)
- Con $n \geq 11$ lados ($n$ impar), tampoco es verdad. (B.-2025)

## Definición

Un **punto de conexión** es un punto del billar tal que para cada dirección que alcanza un vértice, la dirección opuesta también alcanza un vértice.

# Outline

# Grupos de Hecke

## Definición

El grupo de Hecke $H_n$ de nivel $n$ es el subgroupo de $PSL_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices

$$S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } T_n = \pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_n = 2 \cos \frac{\pi}{n}$.

## Definición

El grupo de Hecke $H_n$ de nivel $n$ es el subgroupo de $PSL_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices

$$S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } T_n = \pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_n = 2\cos\frac{\pi}{n}$.

$\rightarrow H_3 = PSL_2(\mathbb{Z})$

## Definición

El grupo de Hecke $H_n$ de nivel $n$ es el subgroupo de $PSL_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices

$$S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } T_n = \pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_n = 2\cos\frac{\pi}{n}$.

$\rightarrow$ $H_3 = PSL_2(\mathbb{Z})$
$\rightarrow$ $S$ es una simetría de orden dos: $S^2 = \pm I_2$.
$\rightarrow$ Además,

$$U_n := T_n S = \pm \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n} \\ -\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$$

y en particular $U_n^n = \pm I_2$.
$\rightarrow$ De hecho, el grupo $H_n$ es un producto libre generado por $U_n$ y $S$.

$$H_n = C_2 * C_n$$

# Acción en el plano hiperbólico

**Proposition (Hecke)**

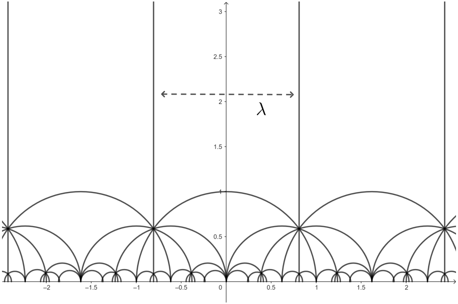
$H_n < PSL_2(\mathbb{R})$ *es un subgrupo* ***discreto****, es decir, un grupo* ***Fuchsiano****.*

En particular, $H_n$ actúa sobre el plano hiperbólico por isometrías (transformaciones de mobius):

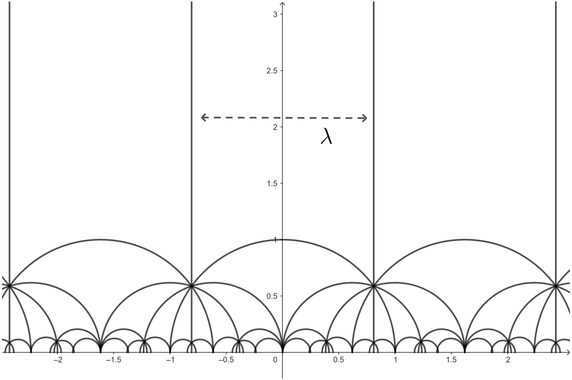
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$T \cdot z = z + \lambda_n$$

$$S \cdot z = \frac{-1}{z}$$



# Rosen "cusp challenge"

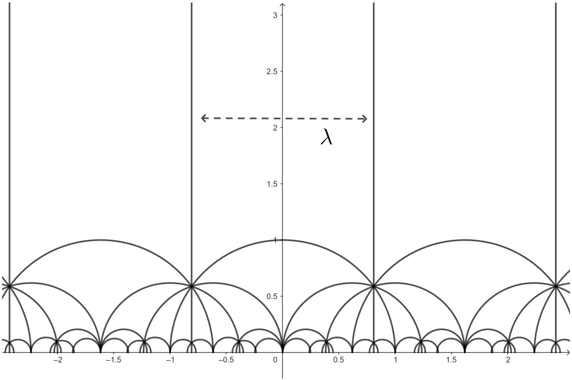



**Pregunta (Rosen cusp challenge, 1954)**

Describa "algebraicamente" $H_n \cdot \infty$.

En otras palabras, nos interesan los vértices de los triángulos en el infinito, que también corresponden a los puntos fijos parabólicos.

# Rosen "cusp challenge"




**Pregunta (Rosen cusp challenge, 1954)**

Describa "algebraicamente" $H_n \cdot \infty$.

Hoy nos limitaremos al caso en que n es impar.

# Primera obstrucción

Tenemos $H_n \subset PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda_n])$, entonces, por $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_n$,

$$M \cdot \infty = \frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}$$

En otras palabras

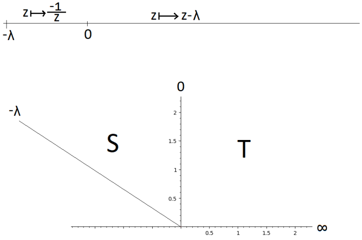
$$H_n \cdot \infty \subseteq \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}$$

- Cada elemento $M$ de $H_n$ se puede escribir $M = T^{a_0}ST^{a_1}\cdots ST^{a_k}S$, con $a_0,\ldots,a_k$ números enteros positivos.
- En consecuencia

$$M\cdot\infty = a_0\lambda - \cfrac{1}{a_1\lambda - \frac{1}{a_2\lambda - \ldots}}$$

y en particular los elementos de la orbita de $\infty$ son (exactamente) los números reales que tienen una expansión de fracciones continuas de Hecke finita.

Algunos numeros reales puede tener dos expansiónes en fraccion continua de Hecke. Una expansión puede ser calculada con el algoritmo del **multiple de $\lambda$ superior (o igual)**, que ademas selecta la expansión finita (en el caso de que existe).



# Fracciones continuas de Hecke

- Cada elemento $M$ de $H_n$ se puede escribir $M = T^{a_0}ST^{a_1}\cdots ST^{a_k}S$, con $a_0, \ldots, a_k$ números enteros positivos.
- En consecuencia

$$M \cdot \infty = a_0\lambda - \cfrac{1}{a_1\lambda - \frac{1}{a_2\lambda - \ldots}}$$

y en particular los elementos de la orbita de $\infty$ son (exactamente) los números reales que tienen una expansión de fracciones continuas de Hecke finita.

Cuando $n = 3$, tenemos $\lambda_3 = 1$, $\mathbb{Q}[\lambda_3] = \mathbb{Q}$, y

$$H_3 \cdot \infty = PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

# Fracciones continuas de Hecke

- Cada elemento $M$ de $H_n$ se puede escribir $M = T^{a_0} S T^{a_1} \cdots S T^{a_k} S$, con $a_0, \ldots, a_k$ números enteros positivos.
- En consecuencia

$$M \cdot \infty = a_0 \lambda - \cfrac{1}{a_1 \lambda - \frac{1}{a_2 \lambda - \ldots}}$$

y en particular los elementos de la orbita de $\infty$ son (exactamente) los números reales que tienen una expansión de fracciones continuas de Hecke finita.

**Teorema (Leutbecher, 1967)**

$$H_5 \cdot \infty = \mathbb{Q}[\lambda_5] \cup \{\infty\} = \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \cup \{\infty\}.$$

# Fracciones continuas de Hecke

- Cada elemento $M$ de $H_n$ se puede escribir $M = T^{a_0} S T^{a_1} \cdots S T^{a_k} S$, con $a_0, \ldots, a_k$ números enteros positivos.
- En consecuencia

$$M \cdot \infty = a_0 \lambda - \cfrac{1}{a_1 \lambda - \frac{1}{a_2 \lambda - \ldots}}$$

y en particular los elementos de la orbita de $\infty$ son (exactamente) los números reales que tienen una expansión de fracciones continuas de Hecke finita.

**Teorema (Borho-Rosenberger, 1973 and Seibold, 1985)**

Para $n \geq 7$ impar,

$$H_n \cdot \infty \subsetneq \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}.$$

# Obstrucción módulo dos

**Teorema (Borho-Rosenberger, 1973 - Seibold, 1985)**

*Para $n \geq 7$ impar,*

$$H_n \cdot \infty \subsetneq \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}.$$

*Prueba ($n = 7, 9$)* Se puede encontrar elementos explícitos de $\mathbb{Q}[\lambda_n]$ que tienen una f.c. de Hecke periódica (a partir de un cierto termíno). Esos elementos no partenecen a $H_n \cdot \infty$.

## Obstrucción módulo dos

**Teorema (Borho-Rosenberger, 1973 - Seibold, 1985)**

*Para $n \geq 7$ impar,*

$$H_n \cdot \infty \subsetneq \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}.$$

*Prueba ($n = 7, 9$)* Se puede encontrar elementos explícitos de $\mathbb{Q}[\lambda_n]$ que tienen una f.c. de Hecke periódica (a partir de un cierto termíno). Esos elementos no partenecen a $H_n \cdot \infty$.

*Prueba ($n \neq 9$).* Mediante la correspondencia

$$x = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\} \leftrightarrow [s : t] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}[\lambda_n])$$

se puede considerar la reducción módulo dos:

$$\overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}] \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}[\lambda_n]/2\mathbb{Z}[\lambda_n])$$

# Obstrucción módulo dos

**Teorema (Borho-Rosenberger, 1973 - Seibold, 1985)**

*Para $n \geq 7$ impar,*

$$H_n \cdot \infty \subsetneq \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}.$$

*Prueba ($n = 7, 9$)* Se puede encontrar elementos explícitos de $\mathbb{Q}[\lambda_n]$ que tienen una f.c. de Hecke periódica (a partir de un cierto termíno). Esos elementos no partenecen a $H_n \cdot \infty$.

*Prueba ($n \neq 9$).* Mediante la correspondencia

$$x = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\} \leftrightarrow [s : t] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}[\lambda_n])$$

se puede considerar la reducción módulo dos:

$$\overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}] \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}[\lambda_n]/2\mathbb{Z}[\lambda_n])$$

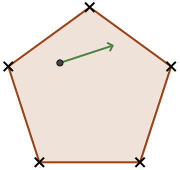
**Lemma (Borho, 1973 - Borho-Rosenberger, 1973)**

*Para $n \geq 7$ impar, excepto $n = 9$, la inclusión es estricta.*

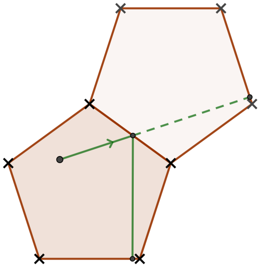
# Outline

# Despliegue de una trayectoria de billar

Queremos estudiar trayectorias de billar en el pentágono (resp. cualquier *polígono racional* - cuyos ángulos son múltiplos racionales de $\pi$):

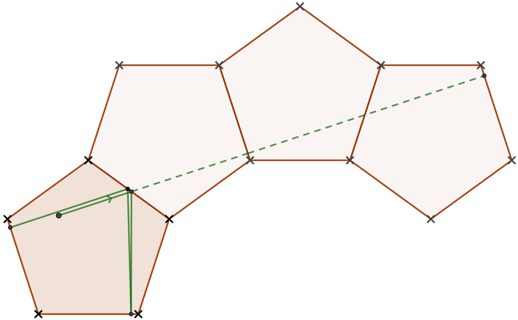


Cuando la trayectoria encuentra un lado, consideramos una copia reflejada del billar donde la trayectoria continúa en línea recta.



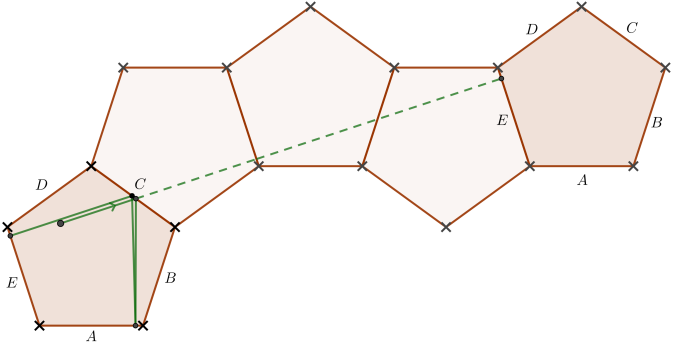
# Despliegue de una trayectoria de billar

Cuando la trayectoria encuentra un lado, consideramos una copia reflejada del billar donde la trayectoria continúa en línea recta.



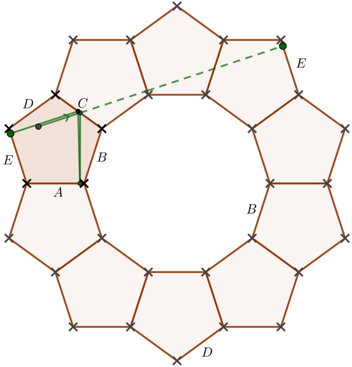
# Despliegue de una trayectoria de billar

Cuando llega un polígono que tiene la misma orientación (con lados etiquetados) que uno de los polígonos anteriores, desplazamos este polígono por traslación sobre el primero y continúamos la trayectoria.



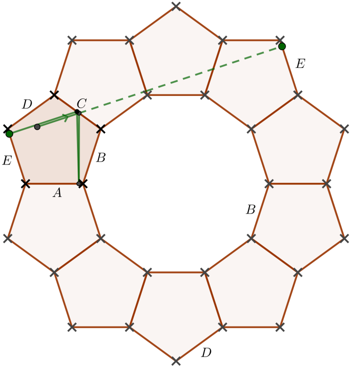
# Despliegue de una trayectoria de billar

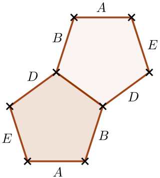
En otras palabras, consideramos el grupo de simetría del pentágono (el grupo diedral con 10 elementos) y por cada elemento una copia del pentágono. Además, identificamos lados entre una copia y otra que es la reflexión de este copia por el lado considerado. Aunque la superficie parece más complicada, todas las idenficaciones de lados se hacen por traslación y la trayectoria tiene una dirección definida.



# Despliegue de una trayectoria de billar

De hecho, en nuestro caso este superficie con 10 pentágonos es un recubrimiento de ordre 5 del **doble pentágono regular** abajo.

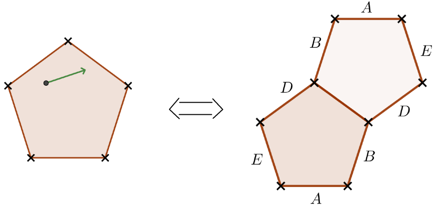



Además, vamos a ver que para nuestro estudio de trajectorias sera suficiente de trabajar con el doble pentágono (resp. el doble $n$-gono regular – $n$ impar).

# Despliegue de una trayectoria de billar

El estudio de trayectorias en un billar racional (i.e. en un polígono cuyos ángulos son múltiplos racionales de $\pi$) se reduce al estudio del *flujo direccional* en una *superficie de traslación*.



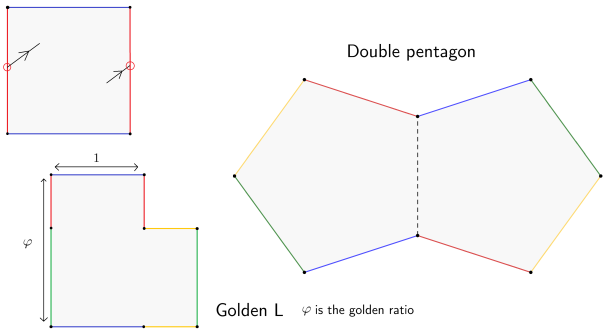

## Definición

Una superficie de traslación es una superficie obtenida a partir de una colección de polígonos euclidianos, identificando pares de lados opuestos paralelos de la misma longitud (por traslación).

# Superficies de traslación

## Definición

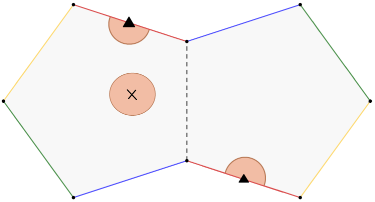
Una superficie de traslación es una superficie obtenida a partir de una colección de polígonos euclidianos, identificando pares de lados opuestos paralelos de la misma longitud (por traslación).



## Definición

Una superficie de traslación es una superficie obtenida a partir de una colección de polígonos euclidianos, identificando pares de lados opuestos paralelos de la misma longitud (por traslación).

Estas superficies también pueden describirse como superficies topológicas con un **atlas de cartas** en la superficie menos un conjunto finito de puntos $\Sigma$ tal que todas las funciones de transición son traslaciones, junto con una dirección distinguida.
$\Sigma$ es el conjunto de **singularidades**.



# Geodésicas en una superficie de traslación

## Definición

Una *separatriz* es un segmento geodésico que parte de una singularidad.
Una *conexión* es un segmento geodésico entre dos singularidades.

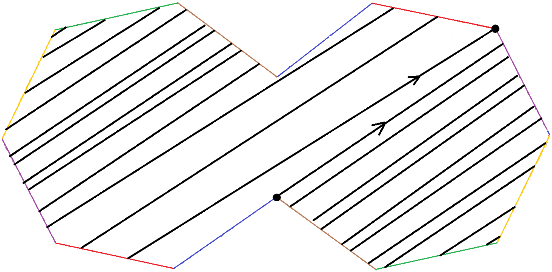
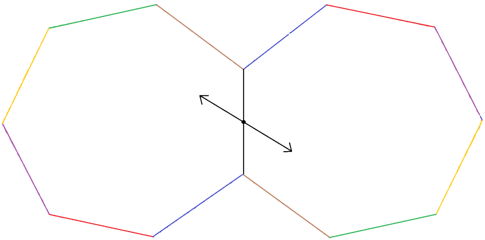


Figure: Ejemplo de conexión en el doble heptágono regular.

### Definición

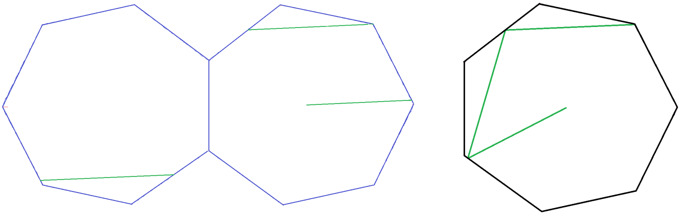
Una *separatriz* es un segmento geodésico que parte de una singularidad. Una *conexión* es un segmento geodésico entre dos singularidades. Un *punto de conexión* es un punto non-singular de la superficie tal que cada separatriz que pasa por este punto se extiende en una conexión.



Los centros de los lados son puntos de conexión, porque son puntos fijos de la rotación de 180 grados.

## Teorema (B.- 2022 and 2025)

*Dado $n \geq 7$ impar, los centros de los n-gonos* ***no son*** *puntos de conexión en el doble n-gono regular.*



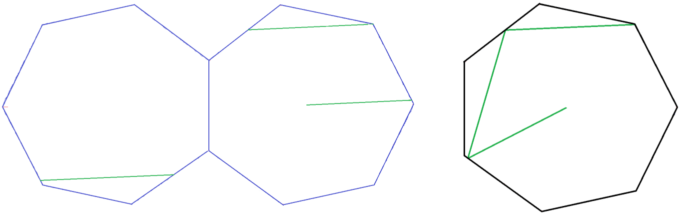
Un ejemplo de separatriz que no se extiende a una conexión en el doble heptágono, y la trayectoria de billar correspondiente en el heptágono.

## Pregunta

¿Cómo certificar que una separatriz dada no se extiende a una conexión?

## Teorema (B.- 2022 and 2025)

*Dado $n \geq 7$ impar, los centros de los n-gonos* **no son** *puntos de conexión en el doble n-gono regular.*



Un ejemplo de separatriz que no se extiende a una conexión en el doble heptágono, y la trayectoria de billar correspondiente en el heptágono.

## Teorema (Veech, 1989)

Las direcciones de las conexiones en el doble $n$-gono están en biyección con los elementos de $H_n \cdot \infty$.

1. Grupos de Hecke y representantes de cúspide

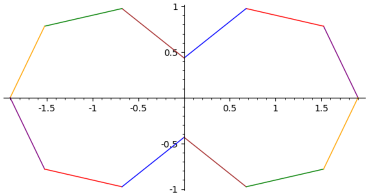
2. De billares sobre polígonos regulares a grupos de Hecke
   - Despliegue de una trayectoria de billar en un polígono racional
   - Conexiónes y puntos de conexión
   - Simetrías de una superficie de traslación: el grupo de Veech

3. Puntos de conexión

El doble $n$-gono regular ($n$ impar) tiene una simetría de orden dos y una simetría de orden $n$.

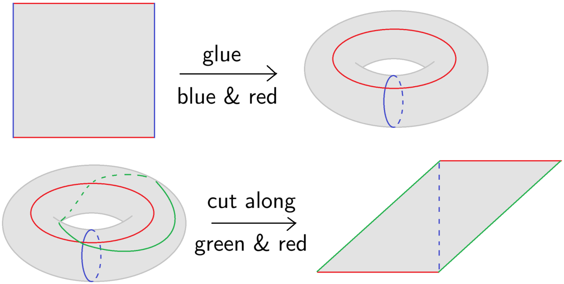
## Definición

El **groupo de difeomorfismos afines** de una superficie de traslación $X$ es el grupo de los difeomorphismos $\varphi : X \to X$ que se expresan como transformaciones afines en cartas locales.

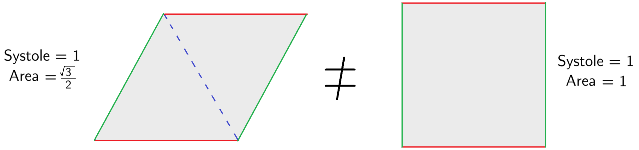



El grupo de difeomorfismos afines del doble $n$-gono regular es isomorfo al producto libre $C_2 * C_n$.

# Espacio de Teichmüller y espacio de moduli



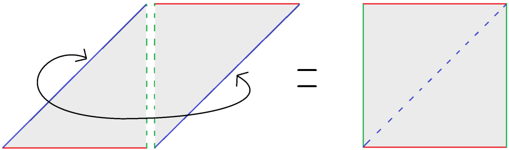

Los dos modelos poligonales arriba representan a la misma superficie, mientras que los dos modelos poligonales abajo representan a superficies con propiedades diferentes.



## Definición

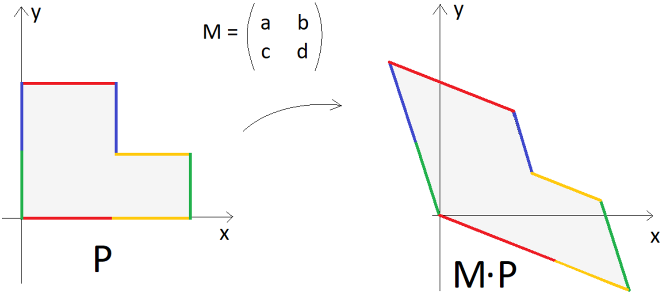
El **espacio de moduli** $\Omega\mathcal{M}_g$ de superficies de traslación de genero $g$ es el conjunto:

$$\Omega\mathcal{M}_g = \left\{ \begin{array}{c} \text{Colección de polígonos con} \\ \text{identificaciones por traslación y} \\ \text{género } g. \end{array} \right\} / \text{corta y pega}$$



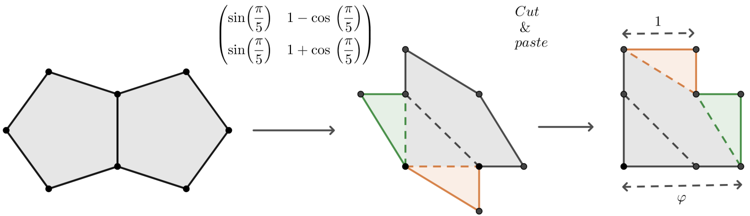
# Acción de $SL_2(\mathbb{R})$

Dada una superficie de traslación $X$ descrita por una colección de polígonos y $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$, podemos construir la superficie de traslación $M \cdot X$.




A menudo es conveniente considerar la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ en lugar de $GL_2^+(\mathbb{R})$ ya que preserva el área.

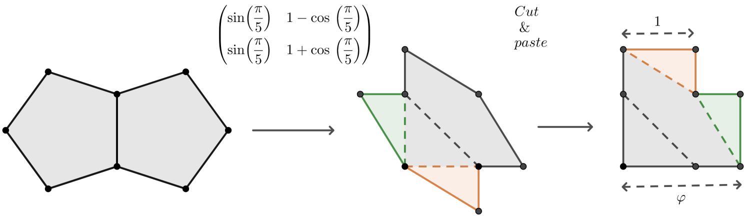
# Ejemplo: el L de oro y el doble pentágono




**Lemma**

*El doble pentágono regular y el L de oro patenecen a la misma* $GL_2^+(\mathbb{R})$ *orbita.*

# Ejemplo: el L de oro y el doble pentágono



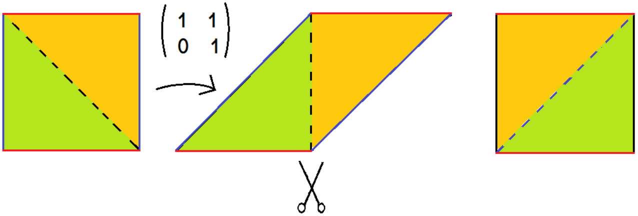

## Lemma

*El doble pentágono regular y el L de oro patenecen a la misma $GL_2^+(\mathbb{R})$ orbita.*

$\rightarrow$ En particular, existe una correspondencia biyectiva entre las conexiones (y los puntos de conexión) en estas dos superficies.

### Definición

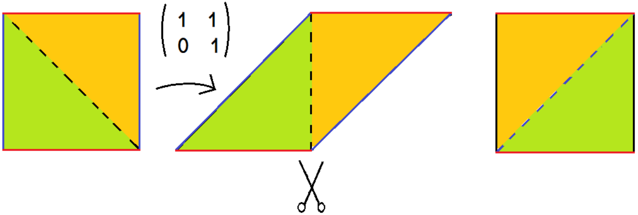
El grupo de Veech de una superficie de traslación $X$ es el estabilizador de $X$ (en el espacio de moduli) bajo la acción de $SL_2(\mathbb{R})$. Lo denotaremos por $SL(X)$.



# Grupo de Veech

## Definición

El grupo de Veech de una superficie de traslación $X$ es el estabilizador de $X$ (en el espacio de moduli) bajo la acción de $SL_2(\mathbb{R})$. Lo denotaremos por $SL(X)$.



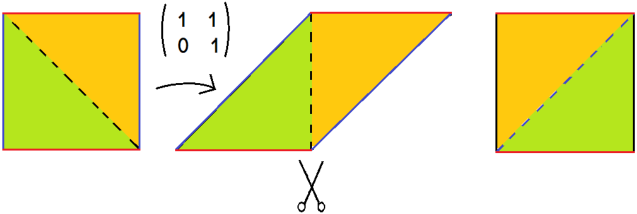

## Proposition

*El grupo de Veech del toro cuadrado plano es $SL_2(\mathbb{Z})$.*

# Grupo de Veech

## Definición

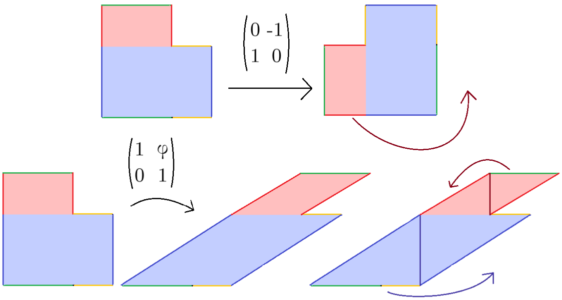
El grupo de Veech de una superficie de traslación $X$ es el estabilizador de $X$ (en el espacio de moduli) bajo la acción de $SL_2(\mathbb{R})$. Lo denotaremos por $SL(X)$.




## Theorem (W.Veech, 1989)

Para cualquier superficie de traslación $X$, $SL(X)$ es un subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$.

# Ejemplo : el L de oro




## Proposition

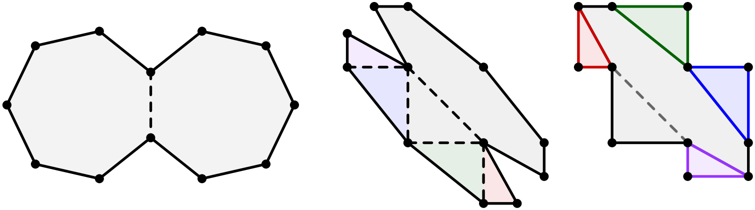
*El grupo de Veech del L de oro es el grupo de Hecke $H_5$, generado por*

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } T := \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*donde $\varphi = 2\cos\frac{\pi}{5} = \lambda_5$ es el número áureo.*

# El modelo en escalera del doble $n$-gono regular

De manera similar, por cada $n \geq 3$ impar existe un modelo 'en escalera' del doble $n$-gono regular:



**Teorema (Veech, 1989)**

*Sea $n \geq 3$ impar. El grupo de Veech del modelo en escalera del doble $n$-gono regular es el grupo de Hecke de nivel $n$.*

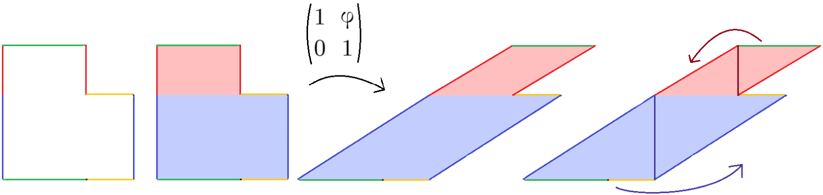
# Direcciones periódicas en superficies Veech

## Teorema (Veech, 1989)

*Sea $X$ una superficie de traslación cuyo grupo de Veech $SL(X)$ tiene covolumen finito. Dada una dirección $\theta$ en $X$, tenemos la siguiente alternativa:*

- *o bien el flujo en la dirección $\theta$ es completamente periódico (todas las geodésicas en esta dirección son cerradas o conexiones)*
- *o es únicamente ergódico (las geodésicas en esta dirección equidistribuyen con respecto a la medida de Lebesgue).*

*Además, el primer caso surge si y sólo si $\theta$ es una eigendirección de una matriz parabólica de $SL(X)$.*



# Direcciones periódicas en superficies Veech

## Teorema (Veech, 1989)

*Sea $X$ una superficie de traslación cuyo grupo de Veech $SL(X)$ tiene covolumen finito. Dada una dirección $\theta$ en $X$, tenemos la siguiente alternativa:*

- *o bien el flujo en la dirección $\theta$ es completamente periódico (todas las geodésicas en esta dirección son cerradas o conexiones)*
- *o es únicamente ergódico (las geodésicas en esta dirección equidistribuyen con respecto a la medida de Lebesgue).*

*Además, el primer caso surge si y sólo si $\theta$ es una eigendirección de una matriz parabólica de $SL(X)$.*

## Corolario

Una separatriz en el modelo de escalera del doble $n$-gono se extiende en una conexión si y solo si su pendiente pertenece a $H_n \cdot \infty$.

1. Grupos de Hecke y representantes de cúspide

2. De billares sobre polígonos regulares a grupos de Hecke
   - Despliegue de una trayectoria de billar en un polígono racional
   - Conexiónes y puntos de conexión
   - Simetrías de una superficie de traslación: el grupo de Veech

3. Puntos de conexión

# Puntos de conexión: algunos motivos

## Pregunta

¿Cuáles son los grupos fuchsianos que surgen como grupos de Veech de superficies de traslación?

## Teorema (Hubert-Schmidt, 2004)

*Sea $X$ una superficie de traslación cuyo grupo de Veech tiene covolumen finito. Sea $P$ un punto de conexión de $X$ tal que su órbita bajo la acción del grupo afín no es finita. Entonces cualquier superficie $X_P$ construida como espacio recubridor (de traslación) finita de $X$ ramificada en $P$ tiene un grupo de Veech que no está finitamente generado.*

## Teorema (Consecuencia de McMullen, 2006)

*Cuando el campo algebraico $K_X$ generado por $\{tr(M), M \in SL(X)\}$ es $\mathbb{Q}$ o cuadrático sobre $\mathbb{Q}$, tenemos una caracterización completa de los puntos de conexión.*

# Puntos de conexión: algunos motivos

## Pregunta

¿Cuáles son los grupos fuchsianos que surgen como grupos de Veech de superficies de traslación?

## Teorema (Hubert-Schmidt, 2004)

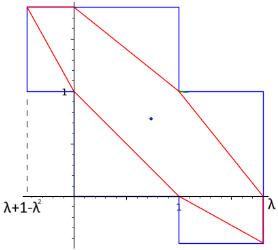
*Sea $X$ una superficie de traslación cuyo grupo de Veech tiene covolumen finito. Sea $P$ un punto de conexión de $X$ tal que su órbita bajo la acción del grupo afín no es finita. Entonces cualquier superficie $X_P$ construida como espacio recubridor (de traslación) finita de $X$ ramificada en $P$ tiene un grupo de Veech que no está finitamente generado.*

## El caso $[K_X : \mathbb{Q}] \geq 3$

Cuando el campo algebraico $K_X$ generado por $\{tr(M), M \in SL(X)\}$ tiene grado tres o más sobre $\mathbb{Q}$, no conocemos ningún ejemplo de punto de conexión cuya órbita bajo la acción del grupo afín no sea finita.

# Primera obstrucción: $H_n \cdot \infty \subset \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}$.

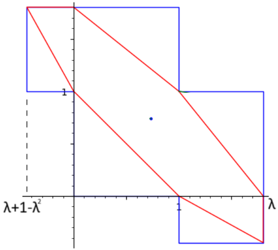
$\rightarrow$ Los puntos de conexión en el modelo de escalera del doble $n$-gono regular tienen coordenadas en $\mathbb{Q}[\lambda_n]$.




Los puntos del modelo en escalera correspondientes a los puntos centrales tienen coordenadas de la forma $\frac{1}{n}(x, x)$ y $x \in \mathbb{Z}[\lambda_n]$.

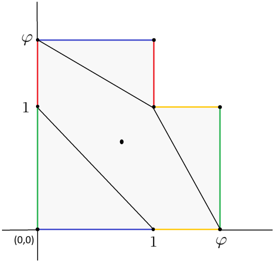
# Primera obstrucción: $H_n \cdot \infty \subset \mathbb{Q}[\lambda_n] \cup \{\infty\}$.

$\rightarrow$ Los puntos de conexión en el modelo de escalera del doble $n$-gono regular tienen coordenadas en $\mathbb{Q}[\lambda_n]$.



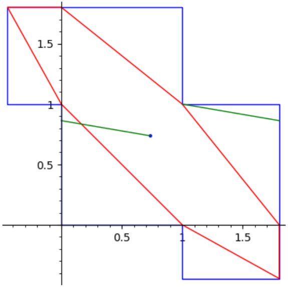

Los puntos del modelo en escalera correspondientes a los puntos centrales tienen coordenadas de la forma $\frac{1}{n}(x, x)$ y $x \in \mathbb{Z}[\lambda_n]$.

En el caso $n = 5$, cualquier punto cuyas coordenadas en el L de oro partenecen a $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ es de conexión.



# $n = 7$ y $n = 9$

Para $n = 7, 9$, se puede utilizar fracciones continuas de Hecke:




Para $n = 7$, el punto central no es un punto de conexión: A la izquierda tenemos un ejemplo de una separatriz que pasa por uno de los puntos centrales cuya pendiente tiene una expansión de fracciones continuas de Hecke periódica a partir de un cierto término. (B.-2022).

Para $n = 9$, funciona el mismo argumento, se puede encontrar (fácilmente) una separatriz explícita que pasa por uno de los puntos centrales cuya pendiente tiene una expansión de fracciones continuas de Hecke periódica a partir de un cierto término (B.-2022).

# Utilizando la obstrucción módulo dos

## Teorema (B.- 2025)

*Sea* $n \geq 7$ *impar,* $n \neq 9$*. Sea* $P$ *un punto del modelo en escalera del doble* $n$*-gono regular cuyas coordenadas son de la forma* $\frac{1}{N}(x, y)$ *con* $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ *y* $N \in \mathbb{N}^\star$*. Entonces,*

- *Si* $N \geq 1$ *es impar,* $P$ *no es un punto de conexión.*
- *Si* $N$ *es par y* $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$*, entonces* $P$ *no es un punto de conexión.*

## Corolario

*Para* $n \geq 7$ *impar,* $n \neq 9$*, los puntos centrales del doble* $n$*-gono regular no son puntos de conexión.*

# Utilizando la obstrucción módulo dos

**Teorema (B.- 2025)**

*Sea $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$. Sea $P$ un punto del modelo en escalera del doble $n$-gono regular cuyas coordenadas son de la forma $\frac{1}{N}(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ y $N \in \mathbb{N}^\star$. Entonces,*

- *Si $N \geq 1$ es impar, $P$ no es un punto de conexión.*
- *Si $N$ es par y $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$, entonces $P$ no es un punto de conexión.*

**Corolario**

*Para $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$, los puntos centrales del doble $n$-gono regular no son puntos de conexión.*

**Pregunta**

Aparte de los centros de los lados, ¿existen puntos de conexión en el doble $n$-gono para $n \geq 7$ impar?

## Teorema (B.- 2025)

*Sea $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$. Sea $P$ un punto del modelo en escalera del doble $n$-gono regular cuyas coordenadas son de la forma $\frac{1}{N}(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ y $N \in \mathbb{N}^{\star}$. Entonces,*

- *Si $N \geq 1$ es impar, $P$ no es un punto de conexión.*
- *Si $N$ es par y $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$, entonces $P$ no es un punto de conexión.*

## Pregunta

Aparte del centro de los lados, ¿existen puntos de conexión en el doble $n$-gono para $n \geq 7$ impar?

## Conjetura

- Para $n = 7$, todos los puntos restantes son puntos de conexión.

## Teorema (B.- 2025)

*Sea $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$. Sea $P$ un punto del modelo en escalera del doble $n$-gono regular cuyas coordenadas son de la forma $\frac{1}{N}(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ y $N \in \mathbb{N}^{\star}$. Entonces,*

- *Si $N \geq 1$ es impar, $P$ no es un punto de conexión.*
- *Si $N$ es par y $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$, entonces $P$ no es un punto de conexión.*

## Pregunta

Aparte del centro de los lados, ¿existen puntos de conexión en el doble $n$-gono para $n \geq 7$ impar?

## Conjetura

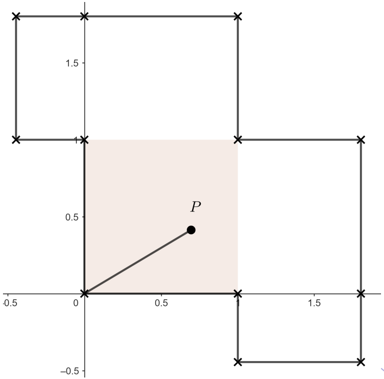
- Para $n = 7$, todos los puntos restantes son puntos de conexión.
- Para $n \geq 9$ (impar), los centros de los lados son los únicos puntos de conexión.

## Teorema (B.- 2025)

*Sea $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$. Sea $P$ un punto del modelo en escalera del doble $n$-gono regular cuyas coordenadas son de la forma $\frac{1}{N}(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ y $N \in \mathbb{N}^\star$. Entonces,*

- *Si $N \geq 1$ es impar, $P$ no es un punto de conexión.*
- *Si $N$ es par y $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$, entonces $P$ no es un punto de conexión.*

Idea de la prueba: si $P$ está en el cuadrado central y $[\overline{x} : \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{0} : \overline{1}]$, entonces podemos considerar la separatriz del origen a $P$: su pendiente es $[x : y]$ que por tanto no está en una dirección periódica.



## Teorema (B.- 2025)

*Sea $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$. Sea $P$ un punto del modelo en escalera del doble n-gono regular cuyas coordenadas son de la forma $\frac{1}{N}(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ y $N \in \mathbb{N}^\star$. Entonces,*

- *Si $N \geq 1$ es impar, $P$ no es un punto de conexión.*
- *Si $N$ es par y $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$, entonces $P$ no es un punto de conexión.*

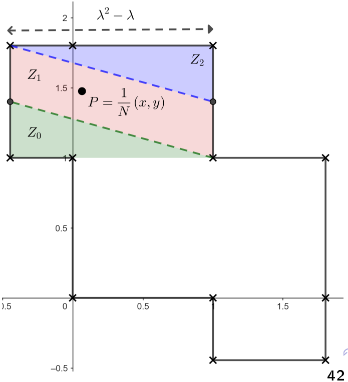
Idea de la prueba: Si, por ejemplo, $P$ esta en el cilindro horizontal superior, entonces

$$\varphi_H^2(P) = \frac{1}{N}(x + 2(y - N)\lambda - \varepsilon N(\lambda^2 - \lambda), y)$$

donde $\varepsilon \in \{0, 1, 2\}$ coresponde a la zona $Z_0, Z_1, Z_2$ donde se encuentra $P$. La reducción modulo dos de las coordenadas de $\varphi_H^2(P)$ son

$$(\overline{x} + \overline{\varepsilon(\lambda^2 - \lambda)}, \overline{y})$$

si $N$ es impar (y se deja igual si $N$ es par).

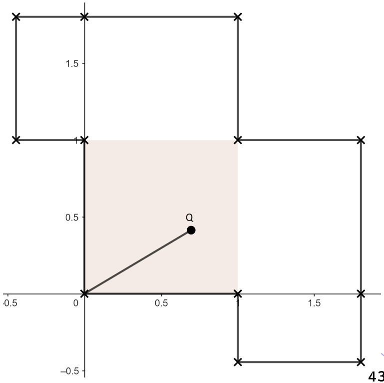


## Teorema (B.- 2025)

*Sea $n \geq 7$ impar, $n \neq 9$. Sea $P$ un punto del modelo en escalera del doble $n$-gono regular cuyas coordenadas son de la forma $\frac{1}{N}(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ y $N \in \mathbb{N}^{\star}$. Entonces,*

- *Si $N \geq 1$ es impar, $P$ no es un punto de conexión.*
- *Si $N$ es par y $[\overline{x}, \overline{y}] \notin \overline{H_n} \cdot [\overline{1} : \overline{0}]$, entonces $P$ no es un punto de conexión.*

Idea de la prueba: Utilizando twists a lo largo de cilindros, se puede construir un punto $Q$ en la órbita de $P$ bajo la acción del grupo de difeomorfismo afín de $X$ que se encuentra en el cuadrado central y tal que la separatriz desde el origen a $Q$ no está en una dirección periódica.

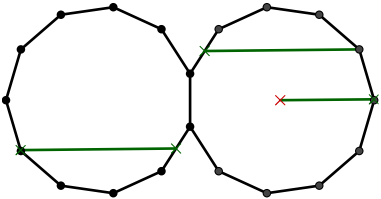


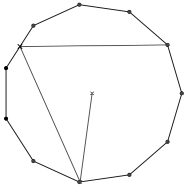
## Teorema (B. - 2025)

*Sea $n \geq 7$ un **número primo**. Consideramos el doble n-gono regular con el origen situado en el centro del n-gono derecho. La separatriz que parte del punto de coordenadas $\left(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}\right)$ con dirección*

$$(X, Y) = \left(1 + 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right),$$

*pasa por el origen (el punto central del n-gon derecho) y no se extiende a una conexión.*





$\rightarrow$ La prueba utiliza cálculos elementales en $\mathbb{Q}[2\cos\frac{\pi}{n}]$.

Gracias !