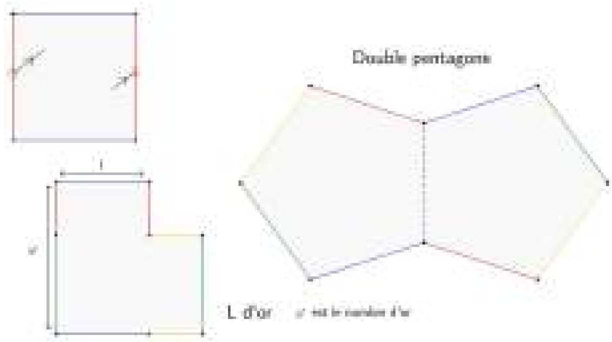
# Une petite explication

Ce document a pour objectif de donner quelques explications vulgarisées de mon travail de thèse. Il est pensé à destination de personnes qui ne font pas spécialement de mathématiques, mais ça ne vous empèche pas de le lire si vous en faites. Il reprend, en français, quelques points essentiels de mon exposé.

## 1 - Surfaces de translation (slides 3-31)

Commençons par la notion de surface de translation, qui est l'objet central que je manipule dans ma thèse. La manière la plus intuitive de définir une surface de translation est de le faire via des polygones : une surface de translation est la donnée d'un (ou plusieurs) polygones pour lesquels on a "*identifié*" les côtés par paires de côtés parallèles et de même longueur.

Le premier exemple à avoir en tête est le carré. Vous identifiez le haut avec le bas, et la gauche avec la droite. Concrètement, identifier deux côtés revient à dire que lorsque vous vous déplacez sur la surface et que vous traversez le côté gauche, vous êtes instantanément téléporté sur le côté droit (idem pour le haut et le bas). Bref, c'est comme dans les jeux Pac-Man ou Snake.

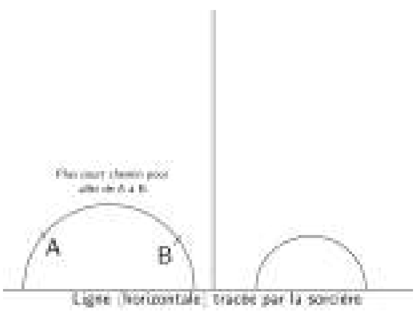



On peut aussi considérer des exemples plus compliqués, comme ceux présentés ci-contre. Parmi les surfaces ayant des propriétés particulières, on retrouve par exemple le $L$ d'or, appelé ainsi car il est en forme de L et ses proportions sont données par le nombre d'or.

**Quelques motivations.** Une première motivation des surfaces de translation concerne l'étude des billards *rationels*, c'est à dire les trajectoires sur des tables de billard polygonales dont les angles du polygone sont de la forme $\frac{p}{q}\pi$, avec $p$ et $q$ des entiers. Une construction classique de "dépliement" du billard permet de ramener l'étude des trajectoires sur un tel billard à l'étude des trajectoires sur une surface de translation, plus simples.

Pour ce que je vais présenter aujourd'hui, les surfaces de translation sont des surfaces sur lesquelles on peut faire des calculs explicites, ce qui nous permet de tester des hypothèses sur des exemples. Mais leur intéret principal réside aussi et surtout dans le fait qu'elles sont à la croisée des chemins entre plusieurs domaines de mathématiques : la géométrie (euclidienne, hyperbolique, et complexe), les systèmes dynamiques, et la théorie des nombres, entre autres !

**La géométrie hyperbolique.** Dans ma présentation, j'explore justement ce lien entre surfaces de translation et géométrie hyperbolique. Mais avant toute chose, qu'est-ce que la géométrie hyperbolique ?



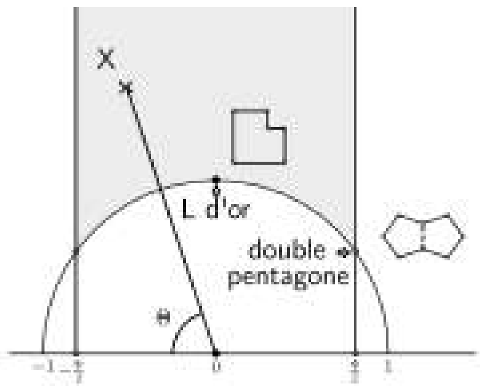

Une manière rigolote d'y penser est la suivante. Imaginez qu'une sorcière trace une ligne droite devant vous, et vous jette un sort : chaque fois que vous faites un pas vers cette ligne, vous rapetissez de moitié. Inversement, lorsque vous vous éloignez, vous grandissez. Cela à pour conséquence qu'il vous est maintenant impossible d'atteindre cette ligne, car plus vous vous approchez, plus vous rapetissez ! La notion de distance est alors totalement déformée. Deux points très loin de cette ligne auront tendance à être très proches car vous ferez des très grands pas pour aller de l'un à l'autre alors que deux points très proches de la ligne seront en fait très éloignés, même s'ils paraissent proches en géométrie euclidienne. En particulier, pour aller d'un point $A$ à un point $B$, il vaut souvent mieux commencer par s'éloigner de la ligne pour ensuite pouvoir faire des plus grands pas. Mathématiquement, les *geodésiques* (i.e. les lignes de plus court chemin) sont les demi-cercles dont le centre est sur cette ligne, et les demi-droites verticales.

Historiquement, cette géométrie à été introduite et étudiée au dix-huitième et dix-neuvième siècles, car elle répond à un problème majeur des *éléments* d'Euclide : est-ce que le 5ème axiome d'Euclide [1] est une proposition qu'Euclide n'a pas réussi à démontrer, ou bien c'est juste que toute la géométrie euclidienne s'effondre sans

1. qui dit que par un point donné passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

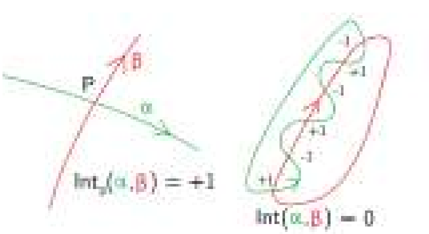
cet axiome ? La réponse, c'est que toute la géométrie euclidienne s'effondre sans cet axiome, car la géométrie hyperbolique vérifie les quatre premiers axiomes, mais pas le cinquième : par un point donné peut passer une infinité de droites "parallèles" à une droite donnée.

**Et alors, les surfaces de translation dans tout ça ?** On y arrive. Ce qu'il faut commencer par comprendre, c'est que plutôt que considérer les surfaces de translation une par une, c'est utile de les considérer toutes ensemble. On a alors un *espace de toutes les surfaces de translation*, et chaque surface est représentée par un point dans cet espace. On a aussi une manière de mesurer la distance entre deux surfaces de translation : deux surfaces sont proches si elles ont un modèle polygonal qui peut être obtenu l'un à partir de l'autre par une "petite déformation". Et il se trouve que dans la manière de mesurer cette distance, on retrouve la géométrie hyperbolique !




Par exemple, sur la figure ci-contre il est représenté l'ensemble de toutes les surfaces qui peuvent s'obtenir à partir du L d'or à partir d'une déformation *matricielle*. Chaque point de la zone grise représente une surface. De plus, la distance hyperbolique entre deux points est exactement la distance entre les deux surfaces de translation. Regardez bien l'animation à la slide 19 !

## 2 - La force d'interaction algébrique (slides 32-45)




C'est cette quantité que j'ai étudiée dans ma thèse, et que je note KVol. Informellement, la force d'interaction algébrique de la surface $X$ mesure la longueur nécessaire pour que deux courbes s'intersectent. L'adjectif algébrique provient du fait que l'on compte les intersections avec un signe. Certaines intersections comptent pour $+1$, et d'autres pour $-1$. Mais pourquoi compter l'intersection comme ça, me direz-vous ? C'est parce que avec cette définition, l'intersection ne change pas lorsqu'on déforme l'une des deux courbes.

Mentionnons au passage que le terme "force d'interaction" date de cette année et qu'il n'a aucun lien (à ma connaissance) avec la physique où autre. L'idée est que deux courbes sur une surface "interagissent" en s'intersectant. Plus elles s'intersectent par rapport à leur longueur, plus leur "interaction" est grande. La force d'interaction correspond à l'interaction maximale que peuvent avoir deux courbes sur une surface donnée.

**Un résultat de ma thèse,** c'est de calculer cette force d'interaction algébrique pour toute une famille de surfaces de translation, et toutes les déformations matricielles de ces surfaces. Même si le résultat est important, c'est aussi la méthode de calcul qui importe, qui utilise des outils de géométrie euclidienne (oui, oui, des sinus et des cosinus), mais aussi de géométrie hyperbolique, et qui nous renseigne sur le comportement de cette force d'interaction.

Avec tous nos prérequis, on peut même énoncer ce résultat dans le cas du $L$ d'or. On rappelle que toutes les surfaces obtenues par déformation matricielle de cette surface se représentent alors dans le domaine grisé de la figure en haut à droite. Maintenant, pour n'importe quelle surface de translation $X$ dans la zone grisée, on peut calculer la force d'interaction algébrique associée à $X$ simplement en regardant l'angle $\theta(X)$ entre le segment $OX$ et l'horizontale. On a alors

$$\mathrm{KVol}(X) = \frac{2\varphi - 1}{(\varphi - 1)^2} \sin\theta(X),$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.61\ldots$ est le nombre d'or.

On peut également généraliser ce résultat à une large classe de surfaces. Un cas particulier que j'utilise dans la généralisation donne le résultat suivant :

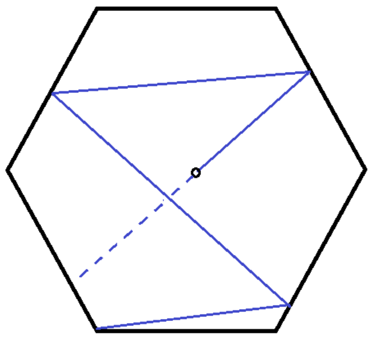
*"dans un polygone dont les angles sont compris entre* 90 *et* 180 *degrés, le produit des longueurs de deux diagonales qui s'intersectent est toujours au moins égal à deux fois la longueur du plus petit côté du polyone au carré."*

N'hésitez pas à récupérer une feuille de papier et tester quelques exemples pour vous faire une idée, voire trouver une démonstration ?

**Un autre résultat,** dont je ne vais pas parler lors de la soutenance mais ayant une interprétation qui peut s'expliquer sans prérequis (si ce n'est de savoir jouer au billard) est le suivant :

Imaginons une table de billard en forme de polygone régulier à $n$ côtés, et plaçons une boule de billard pile sur l'un des coins de la table de billard. On suppose qu'il n'y a aucun frottement et que les collisions sur les bords de notre billard se font sans perte d'énergie, et que notre boule est ponctuelle. (*Désolé, on fait des maths ici*)

On place une boule de billard pile sur un coin, et on vise le centre du polygone (avec un certain nombre de bandes). Un exemple schématique d'une telle trajectoire est donnée ci-dessous, lorsque $n = 6$ (billard hexagonal). La question est de savoir si, en continuant sa trajectoire après être passée par le centre, la boule de billard revient en un coin du polygone.



Par exemple, dans notre billard hexagonal on peut voir directement à l'aide d'une symétrie centrale que la trajectoire va forcément atteindre à nouveau un coin du billard. Notons cependant que cet argument fonctionne car l'hexagone régulier est symétrique par rapport au centre, mais que cela ne fonctionne plus dès que le nombre de côtés est impair !

Dès lors, on peut se demander si ce résultat tient toujours pour le billard sur un polygone régulier à 3 côtés (triangle equilatéral), 5 côtés (pentagone régulier), 7 cotés (heptagone régulier) ou même plus.

- Pour le billard en forme de triangle équilatéral, On peut démontrer sans trop d'efforts qu'une trajectoire qui part d'un sommet et qui passe par le centre du triangle finit toujours par revenir sur un sommet à partir d'un certain temps.
- Pour le billard pentagonal, c'est toujours vrai, mais ce n'est pas si facile. Cela découle des travaux de Boshernitzan (1988), repris sous une autre forme par C.McMullen (2002).
- Pour le billard heptagonal, je démontre dans ma thèse que ce n'est plus vrai ! Autrement dit, il existe des trajectoires qui partent d'un sommet et qui passent par le centre de l'heptagone qui ne retomberont jamais sur un nouveau sommet.
- En fait, la démonstration se généralise au nonagone, puis avec un peu de travail, permet d'obtenir un algorithme qui teste un a un les polygones avec plus de côtés. A l'aide de cet algorithme j'ai par exemple testé les polygones jusqu'à 201 côtés, et ils se comportent tous comme l'heptagone !

Notons que ce n'est pas facile de démontrer qu'une trajectoire ne repasse *jamais* par un sommet, car même après avoir fait un très grand nombre de rebonds (suffisament grand pour qu'on ne puisse pas simuler la trajectoire sur ordinateur en un temps raisonnable), la trajectoire pourrait quand même finir par atteindre un sommet ! Ici, on utilise des propriétés fortes des surfaces de translation, et du double heptagone en particulier, ainsi que des arguments de théorie des nombres.

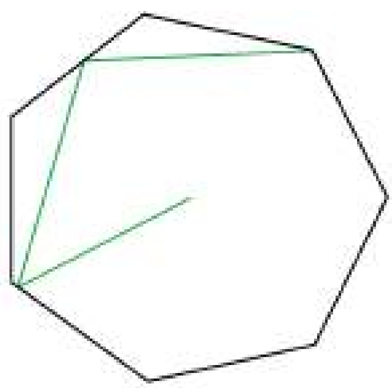


FIGURE 1 – Exemple de trajectoire de billard partant d'un sommet et passant par le centre de l'heptagone qui ne rejoint jamais un sommet à nouveau.

Index mathématique de l'exposé

**Partie 1**

— $\mathbb{R}$ : Ensemble des nombres réels (ex : $1, \sqrt{2}, \pi, \ldots$).
— $GL_2(\mathbb{R})$ : Ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels et telles que $ad - bc \neq 0$.
— $GL_2^+(\mathbb{R})$ : ———————————— $ad - bc > 0$.
— $SL_2(\mathbb{R})$ : ———————————— $ad - bc = 1$.
— $SL_2(\mathbb{R})$-orbite (d'une surface de translation X) : ensemble des surfaces de translation qui peuvent s'obtenir à partir d'une déformation matricielle de $X$. Voir slide 15.
— $SO_2(\mathbb{R})$ : ensemble des matrices associées à une rotation du plan.
— $\mathbb{H}^2$ : Le plan hyperbolique.

**Partie 2**

— **Closed oriented surface** : surface d'extension finie et sans bord sur laquelle on peut choisir une manière d'orienter les vecteurs de façon cohérente.
— **Riemannian metric** : informellement, c'est une manière de mesurer la longueur des chemins tracés sur la surface.
— Vol(X) : Aire de la surface X.
— **sup** : abréviation de supremum, qui veut dire maximum (mais lorsqu'on maximise une infinité de nombres)
— **norme** : manière de mesurer la taille d'un objet donné. Slide 32, on considère deux normes et on les compare.
— **géodésiques** : lignes de plus court chemin (pour la métrique Riemannienne).
— **systole** : En gros, les systoles sont les géodésiques fermées les plus courtes sur la surface. La longueur systolique est la longueur de ces géodésiques.

Index mathématique de l'exposé

**Partie 1**

— $\mathbb{R}$ : Ensemble des nombres réels (ex : $1, \sqrt{2}, \pi, \ldots$).
— $GL_2(\mathbb{R})$ : Ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels et telles que $ad - bc \neq 0$.
— $GL_2^+(\mathbb{R})$ : ———————————— $ad - bc > 0$.
— $SL_2(\mathbb{R})$ : ———————————— $ad - bc = 1$.
— $SL_2(\mathbb{R})$-orbite (d'une surface de translation X) : ensemble des surfaces de translation qui peuvent s'obtenir à partir d'une déformation matricielle de $X$. Voir slide 15.
— $SO_2(\mathbb{R})$ : ensemble des matrices associées à une rotation du plan.
— $\mathbb{H}^2$ : Le plan hyperbolique.

**Partie 2**

— **Closed oriented surface** : surface d'extension finie et sans bord sur laquelle on peut choisir une manière d'orienter les vecteurs de façon cohérente.
— **Riemannian metric** : informellement, c'est une manière de mesurer la longueur des chemins tracés sur la surface.
— Vol(X) : Aire de la surface X.
— **sup** : abréviation de supremum, qui veut dire maximum (mais lorsqu'on maximise une infinité de nombres)
— **norme** : manière de mesurer la taille d'un objet donné. Slide 32, on considère deux normes et on les compare.
— **géodésiques** : lignes de plus court chemin (pour la métrique Riemannienne).
— **systole** : En gros, les systoles sont les géodésiques fermées les plus courtes sur la surface. La longueur systolique est la longueur de ces géodésiques.